CONCURSUL DE MATEMATICA APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A XI-A

Programa M2

1.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$A^2 = 3A \Rightarrow a = 3$	**1p**
b.)	dacă $B = A - A^t \Rightarrow B^4 = I_2 \Rightarrow B^{4k} = I_2, k \in N^*$	**2p**
	$\Rightarrow B^{2013} = B$	**1p**
c.)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $X^5 = A \Rightarrow \det\left(X^5\right) = \det A$, dar $\det A = 0$ și $\det\left(X^5\right) = \left(\det x\right)^5$ de unde obținem $\det X = 0$	**1p**
	Din relația lui Cayley-Hamilton avem: $X^2 - tr\left(X\right) \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$ rezultă $X^2 = (a+d)X$	**1p**
	De unde prin înmulțiri succesive obținem $X^5 = \left(a+d\right)^4 X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(a+d\right)^4 X$	**1p**
	Din $tr\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = tr\left(\left(a+d\right)^4 X\right)$ obținem $3 = \left(a+d\right)^5 \Leftrightarrow a+d = \sqrt[5]{3}$	**1p**
	Deci $X = \frac{1}{\left(a+d\right)^4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\sqrt[5]{3}\right)^4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de unde $X = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt[5]{81}} & \frac{2}{\sqrt[5]{81}} \\ \frac{1}{\sqrt[5]{81}} & \frac{1}{\sqrt[5]{81}} \end{pmatrix}$	**1p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	determinare domeniului	**1p**
	nu are asimptotă orizontală	**1p**
	nu are asimptotă verticală	**1p**
	$y = x$ asimptotă oblică spre $+\infty$	**3p**
	$y = -x$ asimptotă oblică spre $-\infty$	**3p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
	$\Delta = \begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix} = (n!)\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & n+3 \\ n^2+3n+2 & n^2+5n+6 & n^2+7n+12 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta = (n!)^3 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n+1 & 1 & 1 \\ n^2+3n+2 & 2n+4 & 2n+6 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta = (n!)^3 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2) \cdot 2$	**2p**
	Deci ecuaţia se transformă astfel: $2(n!)^3 \cdot (n+1)^2 \cdot (n+2) = (n!)^3 \cdot \left(n^2+3n+2\right) \cdot (n+12) = (n!)^3 \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+12)$	**1p**
	Fiecare factor fiind strict pozitiv putem simplifica cu $(n!)^3 \cdot (n+1) \cdot (n+2)$, obţinând ecuaţia $2(n+1) = n+12$ a cărei soluţie este $n = 10$.	**2p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Coordonatele punctelor sunt: $A(x_1,0)$, $B(x_2,0)$, $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0$, iar $\Delta= b^2-4ac$	**3p**
	Aria triunghiului este S= $\lvert d\rvert/2$	**1p**
	cu d= $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ \frac{-b}{2a} & \frac{-\Delta}{4a} & 1 \end{vmatrix} = \ =\frac{\Delta}{4a}\left(x_1-x_2\right) \Rightarrow S=\frac{1}{2}\left\lvert\frac{\Delta}{4a}\right\rvert\cdot\lvert x_1-x_2\rvert=\frac{1}{8}\frac{\Delta}{\lvert a\rvert}\cdot\lvert x_1-x_2\rvert$.	**3p**
	Utilizând relaţiile lui Viète, se obţine $\lvert x_1-x_2\rvert=\frac{\sqrt{\Delta}}{\lvert a\rvert}$ de unde S= $\frac{\sqrt{\left(b^2-4ac\right)^3}}{8a^2}$.	**2p**